EDL (cours)

→ Equation du premier ordre : J intervalle $\subset \mathbb{R}$

$A, B, C \in \mathcal{C}(J, \mathbb{C})$ | $(E) : A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0$, $(E_0) : C \equiv 0$

→ y_p sol de $E \Rightarrow y - y_p$ sol de E_0

→ S_0 ev de dim 1, S ev affine de dim 1

→ sol : $y' = a(x)y + b$, A primitive de a

$$S = y_p + S_0,\quad y_p = \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\,dt\; e^{A(x)}$$ (VDC...)

→ Cauchy (light) unicité d'une sol y tq $y(x_0) = y_0$

→ Gronwall : $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $u, v \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, $C \geq 0$

$$\forall x \in [a,b] \quad u(x) \leq C + \int_a^x u(t)v(t)\,dt \Rightarrow u(x) \leq C \exp\left(\int_a^x v(t)\,dt\right)$$

→ EDL vectorielle : $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}(I, E)$, I int de $\mathbb{R}$,

E evdf : $(E) : X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t)$

↳ Mêmes props qu'avant (S_0 ev, superposition ...)

→ Cauchy linéaire (CoCo) $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ admet une sol unique telle que $X(t_0) = x_0$ → CPI : A cste → sol $e^{tA} x_0$

→ $B \equiv 0$

preuve : existence : suite $X_{k+1}(t) = \int_{t_0}^{t} A(t)X_k(t) + B(t)\,dt$ CV vers la sol

unicité : majorer la différence entre 2 sols par $M_k \to 0$, $k \to \infty$

→ $\forall t_0 \in I : \Phi_{t_0} \left| \begin{array}{l} S_0 \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longmapsto X(t) \end{array} \right.$ isomorphisme...

→ $(X_1, \dots, X_p) \in S_0^p$, alors $\Updownarrow$
* $(X_1, \dots, X_p)$ libre dans $\mathcal{C}^1(I, E)$
* $\exists t_0 \in I$ $(X_1(t_0), \dots, X_p(t_0))$ libre ds E
* $\forall t \in I$ $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ libre ds E.

→ HP Résolvante : $t_0 \in I$, $X_1, \dots, X_n$ sol de (E) $(E = \mathbb{K}^n)$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$ $X_i(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$, $R(t, t_0) = [X_1(t), \dots, X_n(t)]$

→ $R(t, t_0)$ est la sol de $M'(t) = A(t) \times M(t)$ telle que $M(t_0) = I_n$ (preuve : $R(t, t_0)$ sol → unicité : $M \mapsto A(t)M$ $\mathcal{C}^0$ → $\mathcal{C}(\omega)$)

↳ $A(t)$ cste $\Rightarrow R(t, t_0) = A \exp((t - t_0)A)$

→ VDC vectorielle : $(X_1, \dots, X_n)$ sol de E_0, sol de E toi

$X = \sum \lambda_i(t) X_i(t) \longrightarrow \lambda_i$ primitive de μ_i

$\mu_i(t) = \dfrac{\det(X_1(t), \dots, B(t), \dots, X_n(t))}{\det(X_1(t), \dots, X_n(t))}$

→ Wronskien : $W(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$

↳ $W'(t) = \mathrm{tr}(A(t))\, W(t) \rightarrow W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(u))\, du\right)$

→ EDL d'ordre ≥ 2 : (E) : $y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x) y(x) = b(x)$

$\Phi_{x_0} : S_0 \longrightarrow \mathbb{K}^n$
$\quad y \longmapsto (y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0))$ isomorphisme (bijection si ens de départ $= S$)

→ Système équivalent :

$$\begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

→ Cas particulier : coeffs constants

$$S_0 = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(D - \lambda_i I)^{\alpha_i}, \quad \lambda_i \text{ racine de } \chi_M$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{p} \left\{ e^{\lambda_i t} P(t) \mid P \in \mathbb{C}_{\alpha-1}[X] \right\}$$

trick → Eq d'ordre $n \geq 2$: $W(t) = \det(X_1, \dots, X_n)$ ne s'annule pas si $(X_1, \dots, X_n)$ base de sols

→ Cas particulier : ordre 2 : $W(x) = C \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right)$

→ Second ordre : VDC : voir 2ème fiche.

utile! → Etude des zéros : $y'' + ay' + by = 0$ sur I, φ, ψ deux sols $\neq 0$

▷ Les zéros de φ sont isolés

▷ $[a,b] \subset I \Rightarrow Z(\varphi) \cap [a,b]$ fini

▷ $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = 0 \rightarrow \varphi = \lambda\psi$, $\lambda \in \mathbb{C}$

▷ (φ, ψ) libre, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, $a < b \Rightarrow \psi$ s'annule sur $]a,b[$

+ exemples p160.

→ $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, $(\mathcal{E})$: $X' = AX$

▷ Si $X_0 \in \mathbb{K}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$, la sol de $(\mathcal{E})$ tq. $X(t_0) = X_0$ est $X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$

▷ A DZ, et si $\underset{\lambda_1}{V_1}, \dots, \underset{\lambda_n}{V_n}$ base de $\vec{vp}$, $(e^{\lambda_i t} V_i)$ base de sols

→ Avec second membre : voir 2ème fiche.

→ Eqs vect dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, voir p 168

Methodes résolution EDL

Don't get stuck on basic stuff

▷ Ordre 1 : $A(x)\,y' + B(x)\,y + C(x) = 0$

→ A s'annule : résolution sur domaines séparés puis raccordement.

→ $C \equiv 0$: $y' + a(x)\,y = 0$: $y = K e^{-A(x)}$, $A = \int_{x_0}^{x} a\,dt$, $K \in \mathbb{C}$

→ $C \not\equiv 0$: VDC, on cherche une SP de la forme $x \mapsto f(x)\,e^{-A(x)}$, $\longrightarrow y = \int_{x_0}^{x} e^{+A(t)} b(t)\,dt\; e^{-A(x)}$ est une SP.

▷ Ordre 2 : $ay'' + by' + cy + \cancel{d} = 0$ (a,b,c,d const à priori)

→ est équivalent à : $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ sol de $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$

↳ $(y'' + ay' + by = c)$

→ Coefs cst, $d \equiv 0$: résolution de $ar^2 + br + c = 0$ classique...

→ Si on connait y_1 et y_2 sol de l'eq homogène : VDC

Sol sous forme de $\lambda(x) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} + \mu(x) \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$

↳ $\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{W(x)} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda' = \dots \\ \mu' = \dots \end{cases}$ On intègre (ان شاء الله)

→ Méthode de Liouville : si on connait 1 sol u de $Ay''+By'+Cy=0$, on cherche une sol sous la forme de $y=uz$ → eq d'ordre 1 : $Au\underline{Z}'+(2Au'+Bu')\underline{Z}=D$

↳ sol de $Ay''+By'+Cy=D$ / $Z=z'$

STUCE ⇒ $A+B+C=0$ → sol particulière e^x.

▷ Ordre $n \geq 3$: $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_0=b$

→ Coefs constants :

$$\begin{pmatrix} y \\ | \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ | \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

+ résolution, voir autre fiche

→ Coefs non cst : stuces, dim de l'ev des sols, etc.

▷ EDL vectorielles : $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$

$$X'(t)=A(t)X(t)+B(t)$$

* A = cste

→ $B=0$ → sol valant X_0 en t_0 : $X(t)=e^{(t-t_0)A}X_0$ → demo

→ $V_1, \dots, V_n$ base libre de VP de A ⇒ $(e^{\lambda_i}V_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ base de sols

↳ Check if A D Z, si oui base de VP

↳ Check if e^{tA} calculable [Décomposition $D+N$] → ou

→ $B \neq 0$: VDC, sol sous la forme $e^{tA}C(t)$

↳ SP : $X(t)=e^{(t-t_0)A}+\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)\,ds$

→ Cas général : pas de méthode générale

↳ seule méthode dispo : X lim de $X_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(t)X_n(t) + B(t)\,dt$

$X_0 = x_0 \ldots$

→ VDC cas général : $(X_1, \ldots, X_n)$ base de sols de l'eq homogène, on cherche sol. p. de la forme $X(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) X_i(t)$ → $\lambda_i' = \dfrac{\det(X_1, \ldots, \overset{i}{B(t)}, \ldots, X_n)}{\det(X_1, \ldots, X_n)}$

▷ Système matriciel :

$M'(t) = A(t)M(t)$ → résolvant $R(t, t_0)$, voir autre fiche.

Cauchy linéaire

↳ on cherche les $\overrightarrow{VP}$ et on explicite une base de sols.